

分布列练习

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、解答题

1. 现有 6 道数学题，其中代数题 4 道，几何题 2 道，某同学从中任取 3 道题解答.

(1) 在该同学至少取到一道代数题的条件下，求他取到的题目不是同一类的概率；

(2) 已知所取的 3 道题中有 2 道代数题，1 道几何题. 该同学答对每道代数题的概率都是

$\frac{3}{5}$ ，答对每道几何题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立. 用 X 表示该同学答对题

的个数，求 X 的分布及数学期望.

【答案】(1) $\frac{4}{5}$ ；

(2) 分布列见解析，期望为 2.

【分析】(1) 利用组合数求出同学至少取到一道代数题种数、其中取到的题目不是同一类的种数，再应用古典概型的求法求概率；

(2) 列出 X 的可能值，求出对应概率，写出分布列，进而求期望.

【详解】(1) 由题意，该同学至少取到一道代数题有 $C_4^3 C_2^0 + C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2 = 20$ 种，

其中取到的题目不是同一类有 $C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2 = 16$ 种，

所以该同学至少取到一道代数题的条件下，求他取到的题目不是同一类的概率为

$$\frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

(2) 由题设 $X = 0, 1, 2, 3$ ，则 $P(X = 0) = (1 - \frac{3}{5})^2 (1 - \frac{4}{5}) = \frac{4}{125}$ ，

$$P(X=1) = C_2^1 \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125},$$

$$P(X=2) = C_2^1 \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{57}{125},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125},$$

分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

2. 在一次庙会上，有种“套圈游戏”，规则如下：每组每人 3 个圆环，向 A, B 两个目标投掷，先向目标 A 连续掷两次，每套中一次得 1 分，没有套中不得分，再向目标 B 掷一次，每套中一次得 2 分，没有套中不得分，根据最终得分由主办方发放奖品. 已知甲每投掷一次，套中目标 A 的概率为 $\frac{3}{4}$ ，套中目标 B 的概率为 $\frac{1}{2}$ ，假设甲每次投掷的结果相互独立.

- (1) 求甲在一组游戏中恰好套中一次的概率；
- (2) 求甲在一组游戏中的总分 X 的分布列及数学期望；
- (3) 甲连续玩了 5 组套圈游戏，假设甲每组投掷的结果相互独立，求甲恰有 3 组套圈游戏中得 2 分或者 3 分的概率.

【答案】(1) $\frac{7}{32}$

(2) 分布列见解析， $\frac{5}{2}$

(3) $\frac{5}{16}$

【分析】(1) 根据分步乘法计算概率，再应用互斥事件的概率是概率的和即得；

(2) 分别求出对于概率写出分布列再计算数学期望即可；

(3) 先计算甲在 1 组中得 2 分或 3 分的概率，再根据二项分布求概率即可.

【详解】(1) 设甲恰好套中 1 次为事件 A,

$$P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$$

(2) 由题意得 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32},$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16},$$

$$P(X=4) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32},$$

故 X 的分布列是：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{32}$

则 X 的均值为： $E(X) = 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{9}{32} = \frac{5}{2}$;

(3) 设甲在 1 组中得 2 分或 3 分的事件为 B,

$$P(B) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

设 5 组游戏中，甲恰有 3 组游戏中得 2 分或 3 分为事件 C,

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(C) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.$$

3. 在中国，大熊猫是每个中国人都非常熟悉的动物，有着不可撼动的地位.随着国宝“萌兰”、“花花”可爱搞笑视频的流行，也掀起了一波热爱、保护动物的热潮.某动物园为了向游客宣传保护动物知识，对来访者开设小型知识问答游戏.游戏规则：每位游客回答判断、选择两组题目，每组题目各有两道题，每道题答对得 2 分，答错得 0 分，两组题

目得分的和作为该游客的成绩，不低于 6 分，即可得到一个熊猫玩偶.小明估计答对每道判断题的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，答对每道选择题的概率均为 $\frac{1}{3}$.

(1)按此估计求小明判断题得分比选择题得分多 2 分的概率；

(2)估计小明得到熊猫玩偶的概率；

(3)记小明在比赛中的得分为 ξ ，按此估计 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{7}{36}$

(3)分布列见解析； $E(\xi) = \frac{10}{3}$.

【分析】(1) 根据题意，事件包含两种情况，小明判断题答对 1 道，选择题答对 0 道，或者小明判断题答对 2 道，选择题答对 1 道，即可得到结果；

(2) 根据题意，小明得分 6 分，或者得分 8 分，列出式子即可得到结果；

(3) 根据题意，由条件可得 ξ 的可能取值有 0, 2, 4, 6, 8，然后分别求出其对应的概率，即可得到结果.

【详解】(1) 事件 A 表示“小明判断题得分比选择题得分多 2 分”，

则事件 A 包含小明判断题答对 1 道，选择题答对 0 道，

或者小明判断题答对 2 道，选择题答对 1 道，

$$\text{则 } P(A) = C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

所以小明判断题得分比选择题得分多 2 分的概率 $\frac{1}{3}$.

(2) 事件 B 表示“小明得到熊猫玩偶”，

则事件 B 包含小明得分 6 分，或者得分 8 分，

且小明得分 6 分表示判断题答对 2 题且选择题答对 1 题，

或者判断题答对 1 题且选择题答对 2 题，

$$\text{概率为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

小明得分 8 分表示判断题答对 2 题且选择题答对 2 题，

$$\text{概率为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}, \text{ 所以 } P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

所以小明得到熊猫玩偶的概率为 $\frac{7}{36}$.

(3) 由题意可知， ξ 的可能取值有 0, 2, 4, 6, 8，

$$\text{则 } P(\xi=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P(\xi=2) = C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi=4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{36},$$

$$P(\xi=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(\xi=8) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36},$$

则分布列为

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

$$\text{则 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{13}{36} + 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{36} = \frac{10}{3}.$$

4. 随着中国羽毛球队第 13 次捧起苏迪曼杯，2023 年世界羽毛球混合团体锦标赛在 5 月 21 日落下帷幕。国家羽毛球队在面对东道主和卫冕冠军的双重压力下，多次面临困境，一度濒临绝境但最终都战胜了对对手，站上了冠军领奖台，展现了队员们强大的心理素质 and 永不放弃、顽强，拼搏的中国精神，队员们圆梦经历也告诉我们：人生中会遇到很多逆境，只要逆境中坚定信心，永不放弃，一切皆有可能，就会有奇迹发生。精彩的苏迪曼杯羽毛球比赛激发了某校同学们参加，羽毛球活动的热情，甲、乙两位同学相约打一场羽毛球比赛，若采用五局三胜制，无论哪一方先胜三局则比赛结束，假设在每局比赛中，甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，各局比赛结果相互独立。

(1) 求甲以 3:1 的比分获胜的概率；

(2) 设 X 表示比赛结束时进行的总局数，求 X 的分布列及数学期望。

【答案】(1) $\frac{8}{27}$

(2) 分布列见解析, $E(X) = \frac{107}{27}$

【分析】(1) 甲以3:1的比分获胜, 说明前3局胜2局输1局, 第4局胜利, 根据独立事件的乘法公式计算;

(2) 比赛可能打3,4,5局才结束, 分别根据独立事件的乘法公式计算分别的概率, 然后再算期望.

【详解】(1) 甲以3:1的比分获胜, 则甲在前3局胜2局输1局, 第4局胜利, 概率为:

$$P = C_3^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(2) X 可能的取值为3,4,5,

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}; \quad P(X=4) = \frac{8}{27} + C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{27};$$

$$P(X=5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{10}{27} = \frac{8}{27}$$

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{10}{27} + 5 \times \frac{8}{27} = \frac{107}{27}$$

5. 宿州号称“中国云都”, 拥有华东最大的云计算数据中心、CG 动画集群渲染基地, 是继北京、上海、合肥、济南之后的全国第5家量子通信节点城市. 为了统计智算中心的

算力，先从全市 n 个大型机房和 5 个小型机房中随机抽取若干机房进行算力分析，若一次抽取 2 个机房，全是小型机房的概率为 $\frac{2}{9}$.

(1)求 n 的值；

(2)若一次抽取 3 个机房，假设抽取的小型机房的个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望.

【答案】(1) $n=5$.

(2)分布列见解析， $E(X)=\frac{3}{2}$.

【分析】(1) 利用古典概型的概率公式可得关于 n 的方程，求出其解可得 n 的值.

(2) 利用超几何分布可求 X 的分布列和数学期望.

【详解】(1) 设 A 为“一次抽取 2 个机房，全是小型机房”，则

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{n+5}^2}=\frac{20}{(n+5)(n+4)}=\frac{2}{9},$$

故 $n=5$ 或 $n=-14$ (舍).

(2) X 可取 0,1,2,3,

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}, \quad P(X=1)=\frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}, \quad P(X=2)=\frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5}{12},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12},$$

故 X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
-----	----------------	----------------	----------------	----------------

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

6. 不透明袋中装有质地，大小相同的 4 个红球， m 个白球，若从中不放回地取出 2 个球，在第一个取出的球是红球的前提下，第二个取出的球是白球的概率为 $\frac{5}{8}$.

(1) 求白球的个数 m ;

(2) 若有放回的取出两个球，记取出的红球个数为 X ，求 $E(X)$.

【答案】(1) 5

(2) $\frac{8}{9}$

【分析】(1) 由条件概率公式可得 $\frac{m}{m+3} = \frac{5}{8}$ ，解方程即可得出答案；

(2) 求出随机变量 X 的可能取值及对应的概率，再由期望公式求解即可.

【详解】(1) 由题意知，袋中装有质地，大小相同的 4 个红球， m 个白球，因为第一个取出的球是红球，第二个取出的球是白球的概率为 $\frac{5}{8}$ ，

设第一个取出的球是红球为事件 A ，第二个取出的球是白球为事件 B ，

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{m+4} \cdot \frac{m}{m+3}}{\frac{4}{m+4}} = \frac{m}{m+3} = \frac{5}{8}$$

所以 $\frac{m}{m+3} = \frac{5}{8}$ ，解得 $m = 5$.

(2) 由题意，随机变量 X 可能为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(X=0)=\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{25}{81},$$

$$P(X=1)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}\times 2=\frac{40}{81},$$

$$P(X=2)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81},$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{16}{81}$

$$\text{则期望为 } E(X)=0\times\frac{25}{81}+1\times\frac{40}{81}+2\times\frac{16}{81}=\frac{8}{9}.$$

7. 我国承诺 2030 年前达到“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”，“碳达峰”就是我们国家承诺在 2030 年前，二氧化碳的排放不再增长，达到峰值之后再慢慢减下去；而到 2060 年，针对排放的二氧化碳要采取植树、节能减排等各种方式全部抵消掉，这就是“碳中和”，做好垃圾分类和回收工作可以有效地减少处理废物造成的二氧化碳的排放，助力“碳中和”。某校为加强学生对垃圾分类意义的认识以及养成良好的垃圾分类的习惯，团委组织了垃圾分类知识竞赛活动，竞赛分为初赛、复赛和决赛，只有通过初赛和复赛，才能进入决赛，甲、乙、丙三队参加竞赛，已知甲队通过初赛、复赛的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，乙队通过初赛、复赛的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，丙队通过初赛、复赛的概率分别为 p ， $\frac{4}{3}-p$ ，其中 $0 < p \leq \frac{3}{4}$ ，三支队伍是否通过初赛和复赛互不影响。

(1)求 p 取何值时，丙队进入决赛的概率最大；

(2)在 (1) 的条件下，求进入决赛的队伍数 X 的分布列及均值。

【答案】(1) $\frac{2}{3}$;

(2) 分布列答案见解析, 数学期望: $\frac{4}{3}$.

【分析】(1) 由概率的乘法公式可得 $p_0 = -p^2 + \frac{4}{3}p$, 再由二次函数知识可求解;

(2) 由二项分布可求解.

【详解】(1) 由题知: 丙队通过初赛和复赛的概率

$$p_0 = p\left(\frac{4}{3} - p\right) = -p^2 + \frac{4}{3}p = -\left(p - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{9},$$

$$\text{又因为} \begin{cases} 0 < p \leq \frac{3}{4} \\ 0 \leq \frac{4}{3} - p \leq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } \frac{1}{3} \leq p \leq \frac{3}{4}.$$

所以, 当 $p = \frac{2}{3}$ 时, 丙队进入决赛的概率最大为 $\frac{4}{9}$.

(2) 由 (1) 知:

甲、乙、丙三队进入决赛的概率均为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,

因为进入决赛的队伍数 $X \sim B\left(3, \frac{4}{9}\right)$,

$$\text{所以 } P(X=0) = C_3^0 \times \left(1 - \frac{4}{9}\right)^3 = \frac{125}{729};$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{4}{9} \times \left(1 - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{300}{729} = \frac{100}{243};$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{240}{729} = \frac{80}{243};$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}.$$

所以, 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

所以, $E(X) = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$.

8. 一个袋子中有 5 个大小相同的球, 其中有 3 个白球, 2 个红球, 从中摸出 2 个球.

(1) 求摸出的 2 个球中恰有 1 个白球和 1 个红球的概率;

(2)用 X 表示摸出的 2 个球中的白球个数，求随机变量 X 的分布列及均值.

【答案】(1) $\frac{3}{5}$

(2)分布列见解析： $E(X)=\frac{6}{5}$

【分析】(1) 利用列举法，结合古典概型的概率公式可得答案；

(2) 依题意得到 X 的取值，再依次求得 X 对应的概率，从而得解.

【详解】(1) 依题意，3 个白球记为 a, b, c ，2 个红球记为 m, n ，

则从中摸出 2 个球的基本事件有 $ab, ac, am, an, bc, bm, bn, cm, cn, mn$ ，共 10 件；

其中恰有 1 个白球和 1 个红球的基本事件有 am, an, bm, bn, cm, cn ，共 6 件；

记 A = “摸出的 2 个球中恰有 1 个白球和 1 个红球”，则 $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，

摸出的 2 个球中有 1 个白球和 1 个红球的概率为 $\frac{3}{5}$.

(2) 依题意， X 表示摸出的 2 个球中的白球个数，则 X 的可能取值为 0, 1, 2，

$P(X=0) = \frac{1}{10}$ ， $P(X=1) = \frac{3}{5}$ ， $P(X=2) = \frac{3}{10}$ ，

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.

9. 某闯关游戏规则是：先后掷两枚骰子，将此试验重复 n 轮，第 n 轮的点数分别记为

x_n, y_n , 如果点数满足 $x_n < \frac{6y_n}{y_n+6}$, 则认为第 n 轮闯关成功, 否则进行下一轮投掷, 直到闯关成功, 游戏结束.

(1)求第一轮闯关成功的概率;

(2)如果第 i 轮闯关成功所获的奖金数 $f(i)=10000 \times \frac{1}{2^i}$ (单位: 元), 求某人闯关获得奖金不超过 1250 元的概率;

(3)如果游戏只进行到第四轮, 第四轮后不论游戏成功与否, 都终止游戏, 记进行的轮数为随机变量 X , 求 X 的分布列和数学期望.

【答案】(1) $\frac{2}{9}$

(2) $\frac{49}{81}$

(3)分布列见解析, $\frac{2080}{729}$

【分析】(1) 枚举法列出所有满足条件的数对 (x_1, y_1) 即可,

(2) 由 $10000 \times \frac{1}{2^i} \leq 1250$, 得 $i \geq 3$, 由 (1) 每轮过关的概率为 $\frac{2}{9}$. 某人闯关获得奖金不超过 1250 元的概率: $P(i \geq 3) = 1 - P(i=1) - P(i=2)$

(3) 设游戏第 k 轮后终止的概率为 $P_k (k=1, 2, 3, 4)$, 分别求出相应的概率, 由能求出 X 的分布列和数学期望.

【详解】(1) 当 $y_1 = 6$ 时, $x_1 < \frac{36}{12} = 3$, 因此 $x_1 = 1, 2$;

当 $y_1 = 5$ 时, $x_1 < \frac{30}{11}$, 因此 $x_1 = 1, 2$;

当 $y_1 = 4$ 时, $x_1 < \frac{24}{10}$, 因此 $x_1 = 1, 2$;

当 $y_1=3$ 时, $x_1 < \frac{18}{9} = 2$, 因此 $x_1=1$;

当 $y_1=2$ 时, $x_1 < \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ 因此 $x_1=1$;

当 $y_1=1$ 时, $x_1 < \frac{6}{7}$, 因此 x_1 无值;

$\therefore$ 第一轮闯关成功的概率 $P(A) = \frac{8}{6 \times 6} = \frac{2}{9}$.

(2) 令金数 $f(i) = 10000 \times \frac{1}{2^i} \leq 1250$, 则 $i \geq 3$,

由 (1) 每轮过关的概率为 $\frac{2}{9}$.

某人闯关获得奖金不超过 1250 元的概率

$$\therefore P(i \geq 3) = 1 - P(i=1) - P(i=2) = 1 - \frac{2}{9} - (1 - \frac{2}{9}) \times \frac{2}{9} = \frac{49}{81}$$

(3) 依题意 X 的可能取值为 1, 2, 3, 4

设游戏第 k 轮后终止的概率为 $P_k (k=1, 2, 3, 4)$

$$p_1 = \frac{2}{9}, \quad p_2 = (1 - \frac{2}{9}) \times \frac{2}{9} = \frac{14}{81}, \quad p_3 = (1 - \frac{2}{9})^2 \times \frac{2}{9} = \frac{98}{729}, \quad p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = \frac{343}{729};$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{98}{729}$	$\frac{343}{729}$

$$\text{因此 } E(X) = 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{14}{81} + 3 \times \frac{98}{729} + 4 \times \frac{343}{729} = \frac{2080}{729}$$

10. 在某次世界乒乓球锦标赛的团体比赛中, 中国队将对阵韩国队. 比赛实行 5 局 3 胜制. 根据以往战绩, 中国队在每一局中获胜的概率都是 $\frac{3}{5}$.

(1) 求中国队以 3:0 的比分获胜的概率;

(2) 求中国队在先失 1 局的前提下获胜的概率;

(3) 假设全场比赛的局数为随机变量 X , 在韩国队先胜第一局的前提下, 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

【答案】(1) $\frac{27}{125}$

(2) $\frac{297}{625}$

(3) 分布列见详解, $E(X) = \frac{534}{125}$.

【分析】(1) 由题意可知中国队前三局都获胜, 根据公式计算即可;

(2) 先失一局再获胜, 分为两种情况进行求解, 即①中国队连胜 3 局, ②中国队在 2 到 4 局中胜 2 局, 再胜第 5 局, 利用公式计算即可;

(3) 由题意知 $X = 3, 4, 5$, 分别求出对于的概率, 列出分布列, 求出数学期望即可.

【详解】(1) 设中国队以 3:0 的比分获胜的事件为 A,

所以概率为: $P(A) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$.

(2) 设中国队在先失一局的前提下获胜的事件为 B,

则有 2 种情况:

①中国队连胜 3 局, 此时的概率为: $P_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$;

②中国队在 2 到 4 局中胜 2 局, 再胜第 5 局,

此时概率为: $P_2 = C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{162}{625}$;

所以 $P(B) = \frac{27}{125} + \frac{162}{625} = \frac{297}{625}$.

(3) 由题意知 $X = 3, 4, 5$,

则 $P(X=3) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$,

$P(X=4) = C_2^1 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{51}{125}$,

$P(X=5) = C_3^1 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) + C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{54}{125}$,

所以 X 的分布列为:

X	3	4	5
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{51}{125}$	$\frac{54}{125}$

所以 X 的数学期望为:

$$E(X) = 3 \times \frac{4}{25} + 4 \times \frac{51}{125} + 5 \times \frac{54}{125} = \frac{534}{125}.$$

11. 某大学毕业生响应国家号召, 到某村参加村委会主任应聘考核. 考核依次分为笔试、面试. 试用共三轮进行, 规定只有通过前一轮考核才能进入下一轮考核, 否则将被淘汰, 三轮考核都通过才能被正式录用. 设该大学毕业生通过三轮考核的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, 且各轮考核通过与否相互独立.

(1) 求该大学毕业生未进入第三轮考核的概率;

(2) 设该大学毕业生在应聘考核中考核次数为 ξ , 求 ξ 的分布列、数学期望和方差.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$

(2) 分布列见解析, $E(\xi) = \frac{13}{6}$, $D(\xi) = \frac{29}{36}$

【分析】 (1) 未进入第三轮考核, 即为经过一或二轮考核且没有经过第三轮考核, 通过独立事件概率公式即可求解.

(2) 根据 ξ 的可能取值为 1, 2, 3. 分别求得三种情况下的概率, 根据数学期望公式及方差公式即可求解.

【详解】 (1) 记“该大学生通过第一轮笔试”为事件 A ,
“该大学生通过第二轮面试”为事件 B ,

“该大学生通过第三轮试用”为事件 C .

$$\text{则 } P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{4}, P(C) = \frac{4}{5},$$

那么该大学生未进入第三轮考核的概率是

$$P = P(\bar{A} + A \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(A)P(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

(2) ξ 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P(\xi = 1) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi = 2) = P(A \cdot \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = \frac{1}{6},$$

$$P(\xi = 3) = P(A \cdot B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}$$

则 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

$$\xi \text{ 的数学期望 } E(\xi) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{6},$$

$$\xi \text{ 的方差 } D(\xi) = \left(1 - \frac{13}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{13}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{13}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{29}{36}.$$

12. 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球, 从 A 中摸出一个红球的概率是 $\frac{1}{3}$, 从

B 中摸出一个红球的概率是 $\frac{2}{3}$. 现从两个袋子中有放回的摸球.

(1) 从 A 中摸球, 每次摸出一个, 共摸 5 次. 求:

(i) 恰好有 3 次摸到红球的概率;

(ii) 设摸得红球的次数为随机变量 X , 求 X 的期望;

(2) 从 A 中摸出一个球, 若是白球则继续在袋子 A 中摸球, 若是红球则在袋子 B 中摸球,

若从袋子 B 中摸出的是白球则继续在袋子 B 中摸球, 若是红球则在袋子 A 中摸球, 如此

反复摸球 3 次, 计摸出的红球的次数为 Y . 求 Y 的分布列以及随机变量 Y 的期望.

【答案】(1) $\frac{40}{243}$, $\frac{5}{3}$;

(2) 分布列见解析, 数学期望 $E(Y) = \frac{11}{9}$

【分析】(1) (i) 根据独立重复试验概率公式求解即可;

(ii) 由题意随机变量 X 服从二项分布, 求出变量 X 对应取值的概率, 写出分布列, 利用数学期望公式计算即可;

(2) 分别求出变量 Y 对应取值的概率, 写出分布列, 利用数学期望公式计算即可.

【详解】(1) (i) 由题意, 从 A 袋中有放回地摸球, 是独立重复试验, 根据独立重复试验公式得, 5 次试验中恰好有 3 次摸到红球的概率为 $C_5^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$;

(ii) 由题意可得: 随机变量 X 的取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$$P(X=0) = C_5^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}, \quad P(X=1) = C_5^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243},$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}, \quad P(X=3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243},$$

$$P(X=4) = C_5^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}, \quad P(X=5) = C_5^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}.$$

X 的分布列是:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{32}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{1}{243}$

$$\therefore EX = \frac{32}{243} \times 0 + \frac{80}{243} \times 1 + \frac{80}{243} \times 2 + \frac{40}{243} \times 3 + \frac{10}{243} \times 4 + \frac{1}{243} \times 5 = \frac{5}{3}.$$

(2) 由题意可得: 随机变量 Y 的取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(Y=0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \quad P(Y=1) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27},$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{27},$$

$$P(Y=3) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}.$$

Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{2}{27}$

$$\therefore EY = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{7}{27} + 2 \times \frac{10}{27} + 3 \times \frac{2}{27} = \frac{11}{9}.$$

13. 某校为校级元旦晚会选拔主持人, 现有来自高一年级的参赛选手 5 名, 其中男生 2 名; 高二年级的参赛选手 5 名, 其中男生 3 名. 从这 10 名参赛选手中随机选择 4 人组成搭档参赛.

(1) 设事件 A 为“选出的 4 人中恰有 2 名男生, 且这 2 名男生来自同一个年级”, 求事件 A 发生的概率;

(2) 设 X 为选出的 4 人中男生的人数, 求随机变量 X 的分布列.

【答案】 (1) $\frac{4}{21}$

(2) 分布列见解析

【分析】 (1) 根据古典概型的概率公式即可求得答案;

(2) 确定 X 的可能取值, 求出每个值对应的概率, 即可得分布列.

【详解】 (1) 由题意可知, 从这 10 名参赛选手中随机选择 4 人组成搭档参赛共有 $C_{10}^4 = 210$ 种选法,

事件 A 的选法共有 $C_2^2 C_3^2 + C_3^2 C_2^2 = 40$ 种,

$$\text{故 } P(A) = \frac{40}{210} = \frac{4}{21}.$$

(2) 由题意知 X 的取值可能为 $0, 1, 2, 3, 4$,

$$\text{由于 } P(X = k) = \frac{C_5^k C_5^{4-k}}{C_{10}^4} (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

14. 为弘扬体育精神, 营造校园体育氛围, 某校组织“青春杯”3V3 篮球比赛, 甲、乙两队进入决赛. 规定: 先累计胜两场者为冠军, 一场比赛中犯规 4 次以上的球员在该场比赛结束后, 将不能参加后面场次的比赛. 在规则允许的情况下, 甲队中球员 M 都会参赛, 他上场与不上场甲队一场比赛获胜的概率分别为 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{2}{5}$, 且每场比赛中犯规 4 次以上的概率为 $\frac{1}{4}$.

(1) 求甲队第二场比赛获胜的概率;

(2) 用 X 表示比赛结束时比赛场数, 求 X 的期望;

(3) 已知球员 M 在第一场比赛中犯规 4 次以上, 求甲队比赛获胜的概率.

【答案】(1) $\frac{11}{20}$

(2) $\frac{249}{100}$

(3) $\frac{56}{125}$

【分析】(1) 设 A_i = “第 i 场甲队获胜”, B_i = “球员 M 第 i 场上场比赛”, $i = 1, 2, 3$.

根据对立事件的概率公式即可求解；

(2) 由题意知 X 的可能取值为 2, 3, 结合对立事件和独立事件的概率公式和数学期望的计算公式即可求解；

(3) 根据对立事件、独立事件的概率公式和条件概率公式计算即可求解.

【详解】(1) 设 A_i = “第 i 场甲队获胜”, B_i = “球员 M 第 i 场上场比赛”, $i = 1, 2, 3$.

由全概率公式 $P(A_2) = P(B_2)P(A_2|B_2) + P(\overline{B_2})P(A_2|\overline{B_2}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{11}{20}$.

(2) X 的可能取值为 2, 3.

由题意知 $P(A_1) = \frac{3}{5}$, 由 (1) 知 $P(A_2) = \frac{11}{20}$,

则 $P(\overline{A_1}) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{A_2}) = \frac{9}{20}$,

$P(X=2) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(A_2) + P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{11}{20} + \frac{2}{5} \times \frac{9}{20} = \frac{51}{100}$,

$P(X=3) = 1 - P(X=2) = \frac{49}{100}$, $E(X) = 2 \times \frac{51}{100} + 3 \times \frac{49}{100} = \frac{249}{100}$.

(3) $P(\overline{B_2}) = \frac{1}{4}$, 此时 $P(A_3) = \frac{2}{5}$,

$P(A_1A_2|\overline{B_2} + A_1\overline{A_2}A_3|\overline{B_2} + \overline{A_1}A_2A_3|\overline{B_2}) = P(A_1A_2|\overline{B_2}) + P(A_1\overline{A_2}A_3|\overline{B_2}) + P(\overline{A_1}A_2A_3|\overline{B_2})$
 $= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{56}{125}$.

15. 某智能共享单车备有 A、B 两种车型, 采用分段计费的方式营用, A 型单车每 30 分钟收费 0.5 元(不足 30 分钟的部分按 30 分钟计算), B 型单车每 30 分钟收费 1 元(不足 30 分钟的部分按 30 分钟计算), 现有甲、乙、丙三人, 分别相互独立地到租车点租车骑行(各租一车一次), 设甲、乙、丙不超过 30 分钟还车的概率分别为 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 并且三个人每人租车都不会超过 60 分钟, 甲、乙均租用 A 型单车, 丙租用 B 型单车.

(1) 求甲、乙两人所付的费用之和等于丙所付的费用的概率;

(2) 设甲、乙、丙三人所付费用之和为随机变量 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.

【答案】(1) $\frac{13}{40}$

(2) 分布列见解析, $E\xi = \frac{109}{40}$

【分析】(1) 根据相互独立事件概率计算公式求得所求概率.

(2) 根据相互独立事件概率计算公式求得分布列并求得数学期望.

【详解】(1) 由题意, 甲乙丙在 3 分钟以上且不超过 6 分钟还车的概率分别为 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$,

设“甲乙两人所付费用之和等于丙所付费用”为事件 A,

$$\text{则 } P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{40};$$

(2) 随机变量 ξ 所有可能取值有 2, 2.5, 3, 3.5, 4,

$$\text{则 } P(\xi = 2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 2.5) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{40},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{40},$$

$$P(\xi = 3.5) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{40},$$

$$P(\xi = 4) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40},$$

所以, 甲乙丙三人所付费用之和的分布列为

ξ	2	2.5	3	3.5	4
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{40}$

$$\therefore E\xi = 2 \times \frac{3}{10} + 2.5 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{13}{40} + 3.5 \times \frac{7}{40} + 4 \times \frac{1}{40} = \frac{109}{40}$$